

# 具有超松弛因子的 OSEM 重建算法

刘力<sup>1)</sup> 吴朝霞<sup>2)</sup> 赵书俊<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup>(中国科技大学近代物理系, 合肥 230026)

<sup>2)</sup>(西安交通大学生物医学工程系, 西安 710049)

<sup>3)</sup>(协和医科大学阜外医院核医学科, 北京 100037)

**摘要** 创建了一种比 OSEM 法更快收敛的、更灵活地适应临床要求的医学图象重建迭代算法。通过引入超松弛因子  $\alpha$  改进现有的 OSEM 图象迭代重建算法, 在  $\alpha=1$  时, 回复为通常的 OSEM, 在  $\alpha>1$  时, 合并引入非负约束和总计数归一化约束条件, 保证迭代快速收敛。使用计算机模拟数据和 SPECT 心肌灌注投影数据对该算法进行验证, 并同其他图象重建算法的结果进行了比较, 该算法运算速度比同阶数的 OSEM 快 1 倍以上, 且比同样迭代次数的更高阶数的 OSEM 运算速度还要快。该算法具有收敛速度快, 使用灵活等优点。

**关键词** 超松弛因子 OSEM

**中图分类号**: R814.43 TP391.41 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2002)08-0814-04

## OSEM Reconstruction with Overrelaxation

LIU Li<sup>1)</sup>, WU Zao-xia<sup>2)</sup>, ZHAO Su-jun<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup>(Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

<sup>2)</sup>(Department of Biomedical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

<sup>3)</sup>(Fuwai Hospital, Chinese Academy of Medical Science, Beijing 100037)

**Abstract** An improved OSEM (ordered subset expectation maximization) reconstruction algorithm with OR (overrelaxation) parameter is studied in order to provide a more rapid and practical convergent iterative reconstruction algorithm in tomograph of nuclear medicine, such as SPECT (single photon emission computed tomograph) and PET (positron emission tomograph). Based on the additive version of OSEM, the new method introduces a constant overrelaxation parameter  $\alpha > 1$  during each sub-iteration, and imposes the non-negativity constrain and total-counts normalization condition in subset iteration to overcome the negative image value problem and total-counts shift, in order to ensure its rapid and stable convergence. The method is reduced into ordinary OSEM when  $\alpha = 1$ . The reconstructed images were compared with those of standard OSEM, by both simulated phantom data and clinical SPECT myocardial perfusion data. The OR-OSEM is shown to be one time faster than OSEM's with same subset level, and is even faster than the OSEM with higher subset level. The results also show that this OR-OSEM method is more flexible in practice due to its continuous adjustable OR parameter.

**Keywords** Overrelaxation, Ordered subset expectation maximization

## 0 引言

在核医学断层扫描仪(如 PET、SPECT 等)中, 迭代法重建逐渐为人们采用, 其中 ML-EM<sup>[1]</sup>算法是众多学者公认的一种重建图象质量较好的算法,

但其缺点是收敛速度慢, 难以满足临床快速重建的要求。OSEM 是在 ML-EM 基础上, 通过引入有序子集(ordered-subset)来加快收敛的一种有效的实用重建算法<sup>[2]</sup>。OSEM 将一个完整的历经所有投影的迭代分为  $S$  个相同尺寸子集的迭代, 每经过一次子迭代(sub-iteration)就将图象更新一次,  $S$  称为

OSEM 的阶数(Level),一般讲, $S$  阶的 OSEM 比传统的 ML-EM 算法收敛速度快约  $S$  倍,并且可自动保持图象值的非负性,同时具有和 ML-EM 一样好的重建质量.该算法已在临床中使用,通常只需要进行少数几次完整的迭代(iterative step)就能够获得满意的重建图象质量.

目前,人们不断研究寻找更快更好的迭代算法,以更好地满足临床图象实时重建的要求,尤其是在心脏门控显像(即将一个完整心跳周期分为 8 个或 16 个不同位相(门)进行显像)和动态扫描等低计数采集模式中.新算法是基于 OSEM 的加法形式<sup>[3]</sup>,引入超松弛因子  $z$ ,当  $z=1$  时,回复到通常的 OSEM,当  $z>1$  时,就是超松弛的 OSEM(简记为 OR-OSEM),这是一种改进的 OSEM.计算机模拟数据和 PET 人体胸部模型透射数据的重建结果表明,和相同阶数的传统 OSEM 相比,当取  $z=2$  或 2.5 时,OR-OSEM 具有明显的收敛快、成像质量好的优点,OR-OSEM 的快速、稳定收敛及其非负性是在迭代中通过加入非负约束和总计数标定条件来保证的.

### 1 带有超松弛因子的 OS-EM

传统的 OSEM 可用下式描述

$$x_i(n, s_{k-1}) = x_i(n, s_k) \sum_{i_k} a_{i,j} \frac{y_j}{\hat{y}_j(n, s_k)} / \sum_{i_k} a_{i,j} \quad (1)$$

其中  $n$  为迭代次数; $x(n, s_k)$  表示在第  $n$  次迭代时,用第  $k$  个子集  $s_k$  重建的图象; $i=1, 2, 3, \dots, I$  为图象像素指标; $j=1, 2, 3, \dots, J$  为投影线指标; $k$  为子集指标; $k=1, 2, \dots, S$  表示将所有  $J$  个投影线分为  $S$  个子集合,  $\sum_{i_k}$  表示对第  $k$  个子集  $s_k$  内所有投影线

的求和; $a_{i,j}$  为像素  $i$  对投影线  $j$  的贡献; $s_k$  为第  $k$  个子集; $y_j$  为投影线  $j$  的测量数据; $\hat{y}_j$  为第  $n$  次迭代后图象在投影线  $j$  的值:  $\hat{y}_j(n, s_k) = \sum_{i_k} a_{i,j} x_i(n, s_k)$ .

当  $n=0$  时,  $x_i(n, s_k)$  取为常数初值.由式(1)可以看出,在一次完整迭代过程中,图象被更新  $S$  次.

OR-OSEM 的迭代式为

$$x_i(n, s_{k-1}) = x_i(n, s_k) \left[ 1 + z \left( \frac{\sum_{i_k} a_{i,j} \frac{y_j}{\hat{y}_j(n, s_k)}}{\sum_{i_k} a_{i,j}} - 1 \right) \right] \quad (2)$$

显然当  $z=1$  时,式(2)为传统的 OSEM,当  $z>1$  时,

$z$  因子在子迭代过程中起到放大(加强)误差校正因子的作用,是真正的超松弛因子.但此时  $x_i(n, s_{k+1})$  的非负性不能保证,为此在每次子迭代图象被更新之后加入约束条件

$$x = \max(0, x) \quad (3)$$

目的是去除重建图象中的负值,删除子迭代解中的不合理成份.

在 OSEM 迭代算法中自动保持了总计数守恒,即

$$\sum_{i=1}^I x_i = \sum_{j=1}^J y_j / \sum_{i=1, j=1}^{i=I, j=J} a_{ij} \quad (4)$$

而 OR-OSEM 在  $z \neq 1$  时,不能保持近似解的总计数守恒,该总计数在正确数值上下振荡.为克服此缺点,在每次子迭代结束后,加入保证总计数守恒的约束条件

$$x_{new} = x \frac{\sum_{i_k} y_j}{\sum_{i_k} a_{ij} \cdot \sum_{i_k} x_i} \quad (5)$$

约束条件式(3)、式(5)保证了迭代准确、快速、稳定地收敛.

### 2 计算机模拟数据的重建

计算机模拟产生一个圆形断层<sup>[4]</sup>,如图 1 所示.其中,均匀本底为 10(放射性相对浓度),源最大值为 70.假设一维探测器阵列的效率为 100%,由此产生的投影数据为一个以该断层的理论计算值:  $\sum_{i_k} a_{ij} x_i$  为均值的 Poisson 分布,总计数约为  $10^6$ ,总投影数目,即角度采样个数为  $P=32$ ,且每个投影的元素个数为 64,即在一个角度测量可得到 64 个一维探测器阵列的横向采样个数.

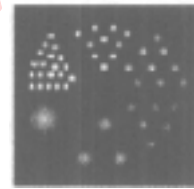


图 1 计算机模拟的 2D Phantom 原图

分别采用  $S=8, S=16$  的 OSEM,  $S=8$  的 OR-OSEM ( $z>1$ ) 以及不加约束条件式(3)和式(5)的 OR-OSEM 进行重建,重建图象大小为  $64 \times 64$  pixels,结果如图 2 所示.

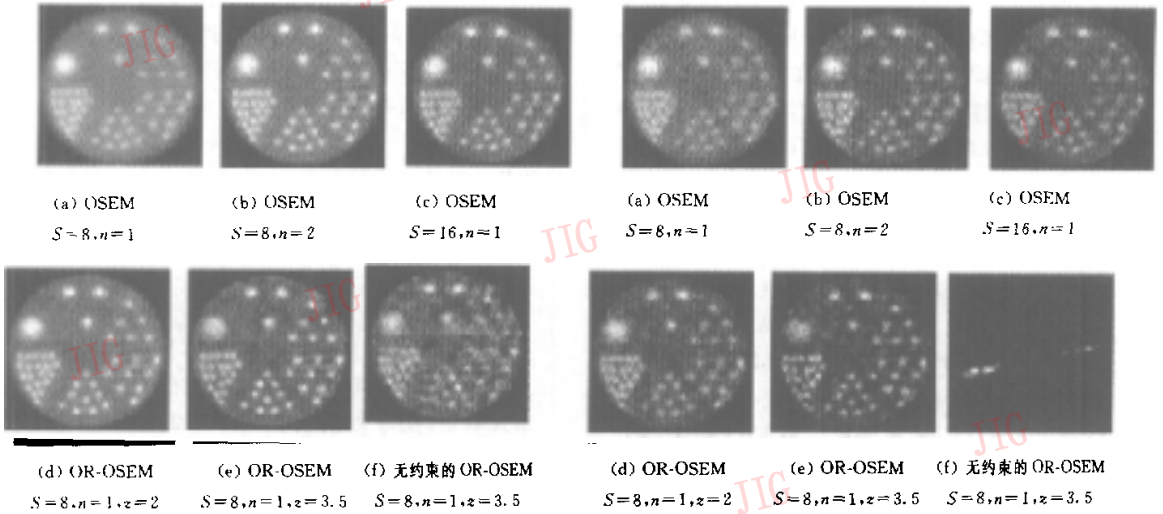


图 2 计算机模拟 2D Phantom 的重建结果

由图 2 可以看出,相同条件下(相同阶数  $S=8$ , 一次迭代)的 OR-OSEM ( $z=2$  时的图 2(d) 和  $z=3.5$  时的图 2(e))重建结果明显好于相同条件下的 OSEM (图 2(a)),前者相当于后者迭代 2~4 次(图 2(b))或更高一阶子集 ( $S=16$ ) 的迭代结果(图 2(c)). 这说明 OR-OSEM ( $z>1$ ) 具有同子集技术效果相近的加快收敛的作用. 图 2(f) 说明在 OR-OSEM 中不加约束会引起重建图象中过多的噪声伪影. 几种重建算法产生相近迭代结果所需要的计算时间如表 1 所示.

表 1 不同算法产生相近重建结果计算时间对比 (模拟 Phantom)

方法	OSEM ( $S=4, n=4$ )	OSEM ( $S=8, n=2$ )	OSEM ( $S=16, n=1$ )	OR-OSEM ( $S=8, n=1, z=2$ )
时间(s)	4.4	2.9	2.4	1.5

表 1 中的数据说明 OR-OSEM 是上述几种算法中速度最快的一种方法,OR-OSEM ( $S=8, n=1, z=2$ ) 比同阶数的 OSEM ( $S=8, n=2$ ) 快 1 倍,也比同样迭代次数的更高阶数的 OSEM ( $S=16, n=1$ ) 运算速度快,这主要是因为子集个数越多,花费在更新图象上的计算时间就越多.

当总计数降低到原来的 1/10 倍时,重建结果见图 3, 此时有同样的结论. 并且在低计数时,OR-OSEM 中的约束条件的重要性更加明显.

由以上结果也可以看出:存在  $z$  值上限, 即当  $z$  取值大于此上限时,OR-OSEM 的重建图象就会恶化.  $z$  值上限与具体采集条件有关. 在第 1 例(图 2)

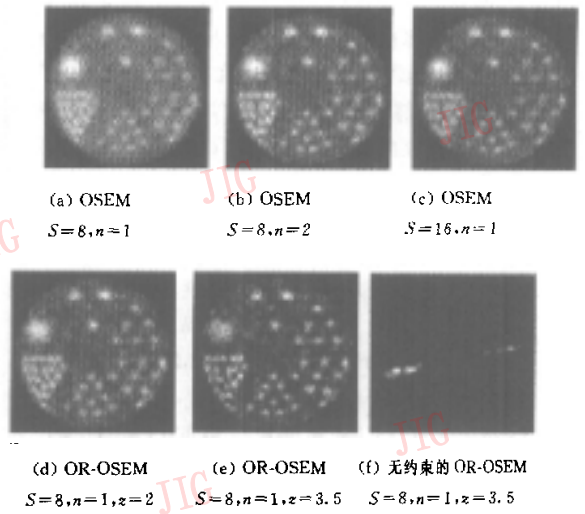


图 3 低计数时计算机模拟 2D Phantom 的重建结果

计算中,  $z$  值上限约为 4.0. 一般讲,计数较高和采样较密集时,  $z$  值上限就较大,可在  $2 \leq z \leq z_{max}$  实数之间选择 OR-OSEM 迭代重建算法的最佳  $z$  值. 当  $z$  大于 2 时,就有明显的加速效果(快一倍以上),若能在保证图象质量情况下,提高现有图象重建运算速度一倍以上,那么在临床应用中具有更强的实时性,可以明显提高诊断效率.

### 3 SPECT 心肌灌注投影数据的重建

采用 SPECT 心肌灌注投影数据(来自北京医院核医学科),角度采样个数为 32 个,采集矩阵为  $64 \times 64$  pixels. 选取其中 18 层分别用 OSEM 和 OR-OSEM 法进行重建,重建图象为  $64 \times 64$  pixels, 结果如图 4.

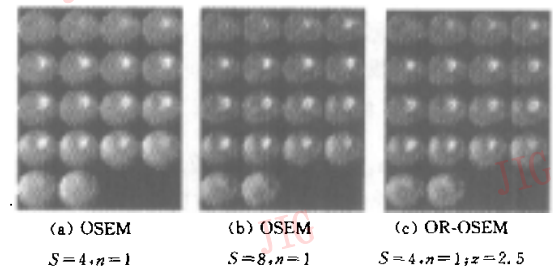


图 4 SPECT 心肌灌注投影数据的重建结果

在本节迭代运算中,最后的显示图象都加入了  $3 \times 3$  的图象中值平滑,以消除孤立噪声. 由图 4 可以

看出,图 4(c)同图 4(b)相近,比图 4(a)更清晰,OR-OSEM 的运算时间比高一阶的 OSEM 更短.

## 4 结果与讨论

带有超松弛因子的 OSEM (OR-OSEM), 当  $\alpha > 1$  时,它具有比相同阶数的 OSEM 更快的收敛速度,进而在相同迭代次数时,给出比后者更好的图象,这是因为 OS 技术和 OR 技术具有双重的加速收敛效果.此外由实验结果也可看出,OS 技术和 OR 技术在加速收敛方面具有等效性.在文献[3]中, Schmidli 等也证明了 OSEM 的加速效果等效于一类超松弛因子的 ML-EM,但为了避免迭代中出现负的像素值,对超松弛因子取值进行了限制,没有在 OSEM 迭代中引入超松弛因子进行二次加速.而 OR-OSEM 在迭代过程中,由于加入了一些合理的非线性约束条件,因此可以在 OSEM 迭代中,引入超松弛因子进行二次加速.

一般 OSEM 中,要求子集的大小相同(从统计学的角度),这样子集划分就不是任意的,即  $S$  应为总投影数  $P$  的因数.虽然 OS 技术和 OR 技术在加速收敛方面具有一定的等价性,但使用超松弛因子的方法更具灵活性,因为超松弛因子  $\alpha$  可取任意分数值,并且在不同的子迭代过程中,可选用不同的值.另外,从计算时间来看,采用较少的子集划分可避免过多的图象近似值的更新计算,因此,最佳的重建方案应根据具体重建问题的需要采取 OS 与 OR 的最佳组合.同 OSEM 中子集阶数  $S$  不能取值过大一样,在 OR-OSEM 中,超松弛因子  $\alpha$  的取值上限也是有所限制的,否则会因为过加速,而在重建图象中产生噪声和伪影.

致 谢 感谢北京医院核医学科姚稚明提供的 SPECT 心肌灌注投影数据.

## 参 考 文 献

- 1 Shepp L A, Vardi Y. Maximum likelihood reconstruction in emission tomography [J]. IEEE Trans. Med. Imag., 1982, MI-1(3):113~122.
- 2 Hudson H M, Larkin R S. Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data [J]. IEEE Trans. Med. Imag., 1994, 13(4):601~609.
- 3 Peter S, Matthias E B, Gunnar B. Subsets and overrelaxation in iterative image reconstruction [J]. Phys. Med. Biol., 1999, 44(5):1385~1396.
- 4 Wallis J W, Miller T R. Rapidly converging iterative reconstruction algorithms in Single-Photon Emission Computed Tomography [J]. J. Nucl. Med., 1993, 34(10):1793~1800.



刘 力 1962 年生, 博士, 现在在中国科技大学从事博士后研究工作. 主要研究方向为核医学中的图象重建与图象处理算法研究.



吴朝霞 1975 年生, 西安交通大学生命科学与技术学院生物医学工程系博士研究生. 主要研究方向为医学信号及图象处理技术.



赵书俊 1960 年生, 博士, 现在在协和医科大学阜外医院从事博士后研究工作. 主要研究方向为医学图象融合及临床图象处理与分析.